E.N.S. Saint-Cloud et Fontenay 1985

Option Sciences Physiques Math I

Durée : 4 heures

I

Soit u_n une suite de nombres réels. Pour tout entier q, on pose $S(q) = \sup \{ u_n , n \geqslant q \}$. On pose $\limsup_n (u_n) = \inf \{ S(q) , q \geqslant 0 \}$; on a donc $\limsup_n (u_n) \in [- \infty , + \infty]$.

1° Que signifie $\limsup_n (u_n) = + \infty$?

2° Montrer que $\limsup_n (u_n) = \lim_{q \to \infty} S(q)$.

3° Montrer que, si $\limsup_n (u_n) \neq - \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier q tel que, pour $n \geqslant q$, on ait $u_n \leqslant \limsup_n (u_n) + \varepsilon$.

4° Soient l, M et N des nombres réels tels que, pour $n \geqslant N$, on ait $|u_n| \leqslant M l^n$. Montrer que $\limsup_n (|u_n|^{\frac{1}{n}}) \leqslant l$.

II

Soit $F(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R avec $R \in]0, \infty[$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$, on note $A(n,p)$ la matrice carrée d'ordre $p+1$ dont les coefficients sont :

$$A(n,p)_{i,j} = a_{n+i+j-2} \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant p+1 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant p+1 .$$

On note $D(n,p)$ le déterminant de $A(n,p)$ et on pose :

$$l_p = \limsup_n (|D(n,p)|^{\frac{1}{n}}) .$$

On admettra que $l_0 = \dfrac{1}{R}$.

1° Montrer que $l_p \leqslant \dfrac{1}{R^{p+1}}$. Pour cela, on pourra majorer chaque terme du développement du déterminant grâce à I.3° puis appliquer I.4°.

2° Soit $P(z) = b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \ldots + b_0$ un polynôme non nul de degré au plus p.

a. On suppose que $P(z) F(z)$ est un polynôme de degré au plus d. Montrer que $D(n,p) = 0$ pour $n \geqslant d + 1 - p$.

b. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $P(z) F(z)$ est supérieur à un nombre réel R'. Montrer que $l_p \leqslant \dfrac{1}{R' R^p}$. On pourra majorer le déterminant du produit $A(n,p) M$, où M s'obtient en remplaçant dans la matrice unité une colonne convenable par celle dont les coefficients sont les b_i.

3° Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $D(n,1) \neq 0$.

a. Résoudre le système :

$$a_n + a_{n+1} u_n + a_{n+2} v_n = 0 , \quad a_{n+1} + a_{n+2} u_n + a_{n+3} v_n = 0 .$$

b. Vérifier que

$$\left| \begin{array}{l} u_{n+1} - u_n = \dfrac{D(n+3,0)\, D(n,2)}{D(n+1,1)\, D(n+2,1)} \\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{- D(n+2,0)\, D(n,2)}{D(n+1,1)\, D(n+2,1)} . \end{array} \right.$$

c. On suppose que $D(n,2) = 0$ pour $n \geqslant N$. Prouver qu'il existe un polynôme $P(z)$ de degré 2 tel que $P(z) F(z)$ soit un polynôme.

4° On suppose que $\lim_{n \to \infty} |D(n,1)|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{R^2}$ et $l_2 < \dfrac{1}{R^3}$.

a. Prouver que les séries $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ convergent.

b. Soient u et v les limites de u_n et v_n ; majorer $u - u_n$ et $v - v_n$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $(z^2 + uz + v)\,F(z)$ est strictement supérieur à R.

c. Trouver les polynômes $P(z)$ tels que le rayon de convergence de la série entière $P(z)\,F(z)$ soit strictement supérieur à R.

5° On suppose que, pour tout entier $q \geqslant 0$, on a :

$$a_{4q} = 1 \ , \ a_{4q+1} = 1 \ , \ a_{4q+2} = -1 \ , \ a_{4q+3} = -1 .$$

Calculer l_p pour tout $p \in \mathbf{N}$. Trouver u et v. Déterminer $F(z)$.

6° On suppose que $D(n, 2) = 0$ pour $n \geqslant s$, $s \in \mathbf{N}$

a. Prouver que l'on a

$$\left[\begin{array}{l} D(n, 1) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant s + 1 \\ \text{ou} \\ D(n, 1) \neq 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant s + 1 \end{array}\right.$$

b. Prouver que si $l_1 \neq 0$, alors $F(z)$ est la série entière d'une fraction rationnelle $\dfrac{G(z)}{(z-a)(z-b)}$. Déterminer l_0 et l_1 en fonction de $|a|$ et $|b|$.

Que signifie la condition $|a| = |b|$? On la suppose satisfaite et on pose :

$$L = \limsup_n \frac{\operatorname{Log}(|a_n R^n| + 1)}{\operatorname{Log} n} .$$

Prouver que $L = 0$ si $a \neq b$ et $L = 1$ si $a = b$.

7° On suppose que $F(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} j\,(n + j) \left(\frac{z}{j}\right)^n$

avec $j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Calculer l_p et $D(n, p)$ pour $p \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Déterminer $F(z)$.